ПРИЛОЖЕНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №58

# Учет теплоемкости образца.

## 1. Точное решение уравнения теплопроводности.

Формулы (4)-(6) основного текста справедливы, когда теплоемкостью образца $C_0$ можно пренебречь по сравнению степлоемкостью приемника. Если считать $C_0 = 0$ (тепло не поглощается образцом), то количество тепла, втекающее за время $dt$ в каждый элементарный объем $dV$, равно количеству тепла, вытекающего из него. Поэтому дивергенция вектора плотности теплового потока $\vec{q}$ должна в пределах образца равняться нулю.

Если же $C_0 \neq 0$, то необходимо написать уравнение теплового баланса для элементарного объема. Рассмотрим элементарный объем $dV = dxdydz$ с центром в точке $x, y, z$ (рис.1). Через левую грань в него втекает за врем $dt$ количество тепла, равное $q_x(x - \frac{dx}{2}, y, z)\, dydzdt$, через правую - вытекает - $q_x(x + \frac{dx}{2}, y, z)\, dydzdt$. Разность этих количеств равна $-\frac{\partial q_x}{\partial x}\, dxdydzdt$. Рассматривая аналогичным образом другие пары граней, находим, что объем $dV$ за время $dt$ получает количество тепла $-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dVdt = div\vec{q}dVdt$. Это тепло идет на нагревание вещества в данном объеме, температура $T$ которого в результате повышается на $dT = -\frac{div\vec{q}\,dV\,dt}{C_0 dV}$, где $C_0$ - теплоемкость единицы объема вещества. Учитывая, что $q_x = æ\,\frac{\partial T}{\partial x}\,, \cdots$, получим

$$C_0\,\frac{\partial T}{\partial x} = æ\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{1}$$

Это уравнение обычно называют уравнением теплопроводности (хотя оно включает также и уравнение теплового баланса).

В нашем случае $T$ зависит только от одной координаты $z$, и уравнение (1) упрощается:

$$C_0\,\frac{\partial T}{\partial t} = æ\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,. \tag{2}$$

Это уравнение надо решить при определенных граничных условиях, которые дл случая измерения теплопроводности (печка приемника не включена) имеет вид:

$$(z = 0):\; T(0, t) = T_{\text{н}} = const \tag{3}$$

$$(z = d):\; T(d, t) = T_{\text{х}};\; \frac{C_{\text{х}}}{S}\,\frac{\partial T_{\text{х}}}{\partial t} = -æ\,\frac{\partial T(z, t)}{\partial z}|_{z=d} \tag{4}$$

Здесь $C_{\text{х}}$ - теплоемкость всего приемника, площадь верхней (примыкающей к образцу) поверхности которого равна $S$, $T_{\text{н}}$ - температура нагревателя и $T_{\text{х}}$ - температура приемника. Кроме того нужно задать начальное условие – распределение температуры в начальный момент $t = 0$. Физически ясно, что задание начальных и граничных условий однозначно определяет функцию $T(z, t)$[1]; соответствующие теоремы о существовании и единственности доказываются в курсе математики.

Нетрудно убедиться, что уравнение (2) имеет следующие частные решени

$$T_1(z, t) = C\,;\;\; T_2(z, t) = D\,z\,;$$

$$T_3(z, t) = A\,e^{-\alpha t}\,Sin\beta z\,;\; T_4(z, t) = B\,e^{-\alpha t}\,Cos\beta z\,, \tag{5}$$

где $A$, $B$, $C$ и $D$ – произвольные постоянные, а константы $\alpha$ и $\beta$ связаны уравнением

$$C_0\alpha = æ\,\beta^2\,. \tag{6}$$

[1] К подобным доводам следует относитьс с известной осторожностью, поскольку написанные уравнения (математическа модель явления) всегда являются приближенными. Не исключено, что какие-то свойства изучаемой системы, исключенные из приближенного рассмотрения, в действительности существенно влияют на ее поведение. Тогда естественно ожидать, что приближенные уравнения будут иметь несколько решений, выбор между которыми мог бы быть сделан при более полном учете реальных характеристик системы.

В силу линейности уравнения (2) любая линейная комбинация функций (5) также является решением. Мы попытаемся построить из этих функций решение, удовлетворяющее граничным условиям (3) и (4) и начальному условию

$$t = 0 \;:\;\; T(z,0) = T_0(z)\,, \tag{7}$$

где $T_0(z)$ - произвольная функция (начальное распределение температуры может быть любым).

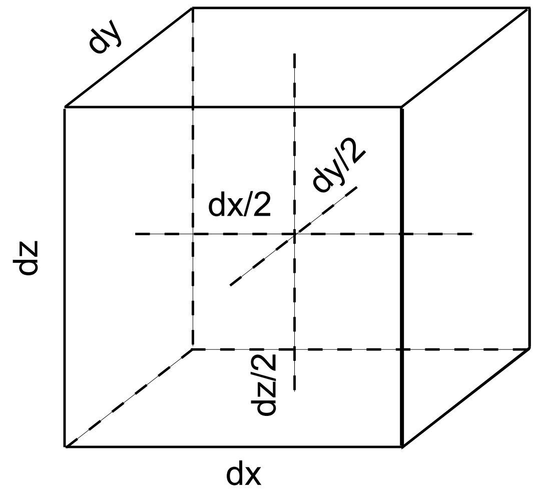


Рис. 1:

Условие (3) будет выполняться при любых $t$, если $C = T_{\text{н}}$, $B = 0$. При $t \to \infty$ решение должно иметь вид $T(z,t) = T_{\text{х}} = T_{\text{н}}$, поэтому $D = 0$. Условие (4) дает

$$\frac{C_{\text{х}}}{S}\,\alpha\, A\, e^{-\alpha t}\, Sin\beta d = +\ae\,\beta\, A\, e^{-\alpha t}\, Cos\beta d\,. \tag{8}$$

Это – второе уравнение, связывающее $\alpha$ и $\beta$. Сокращая на $A\,e^{-\alpha t}$ и подставляя $\alpha$ из (6), имеем

$$tg\beta d = \frac{S\,C_0}{C_{\text{х}}\beta}\,. \tag{9}$$

Это трансцендентное уравнение удобно решать графически, построив функции $y_1 = tg\beta d$ и $y_2 = \frac{d\,S\,C_0}{C_{\text{х}}}\,\frac{1}{\beta d}$ в зависимости от $x = \beta d$. Решение найдетс как точка пересечения графиков $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Из рис.2 видно, что имеетс бесконечное множество решений[1]. При малых $\frac{S\,C_0}{C_{\text{х}}}\,d$ наименьшее решение $\beta_1 d$ будет лежать в области малых $x$, и его можно найти, используя разложение тангенса в ряд Мак-Лорена

$$\beta_1\, d + \frac{(\beta_1 d)^3}{3} + \cdots = \frac{S\,C_0}{C_{\text{х}}}\, d\, \frac{1}{\beta_1 d}\,. \tag{10}$$

Ограничиваясь первым членом, находим:

$$\beta_1\, d \simeq \sqrt{\frac{S\,C_0}{C_{\text{х}}}\, d}\,;\;\; \alpha_1 \simeq \frac{\ae}{d\,C_{\text{х}}}\, S\,. \tag{11}$$

Остальные значения $\beta d$ будут очень близки к $\pi$, $2\pi$, $\cdots$, то есть

$$\beta_n \simeq \frac{(n-1)\,\pi}{d}\,;\;\; \alpha_n \simeq \frac{(n-1)^2\pi^2}{d_2}\,\frac{\ae}{C_0}\;(n = 2, 3, \cdots)\,. \tag{12}$$

Таким образом, мы получили решение нашей задачи в форме

$$T(z,t) = T_{\text{н}} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\alpha_m t}\, Sin\beta_m z\,. \tag{13}$$

[1] Подумайте, почему можно не рассматривать область $\beta < 0$.

Постоянные $A_m$ нужно выбирать так, чтобы выполнялось начальное условие

$$T_0(z) - T_н = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \, Sin\beta_m z \,. \tag{14}$$

Модно показать, что любая физически осуществимая функция $T_0(z) - T_н$, обращающаяся в нуль при $z = 0$, может быть представлена в виде такого ряда. Иначе говоря, функция (13) удовлетворяет произвольным начальным условиям, то есть является общим решением задачи о распространении тепла в системе, описываемой уравнениями (2)-(4).

## 2. Переходный процесс.

Из рис.2 видно, что $\beta_1 d$ всегда меньше $\pi/2$, а $\beta_2 d$ всегда больше $\pi$. Поэтому $\alpha_2/\alpha_1$ всегда превышает 4, а при выполнении приближения (11)

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\pi^2 \, \frac{C_х}{S_{\,0}\, d} \gg 10 \,.$$

Поэтому все члены с $m > 1$ в (13) убывают намного быстрее первого члена, и через достаточно длительное врем после начала опыта мы получим

$$T(z,t) = T_н + A_1 \, e^{-\alpha_1 t} \, Sin\beta_1 z \,; \;\; T_0 = T_н + A_1 \, e^{-\alpha_1 t} \, Sin\beta_1 t \,. \tag{15}$$

Время установления этого квазистационарного режима будет порядка $1/\alpha_2$.

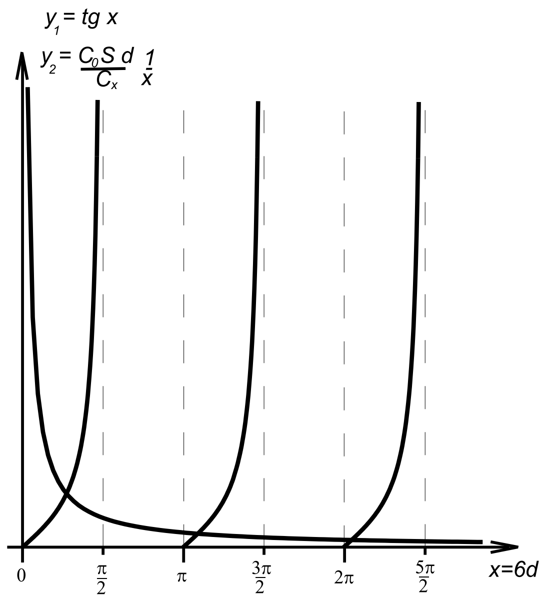


Рис. 2:

## 3. Измерение теплопроводности.

Приближение (11) соответствует замене синусоидального распределения температур в образце линейным. Улучшенное приближение можно получить, переписывая (10) в форме

$$\beta_1^2 d^2 \, \left(1 + \frac{\beta_1^2 d^2}{3}\right) = \frac{S\, C_0}{C_х} \, d \,,$$

и подставляя (11) в поправочный член в скобках. Тогда

$$\beta_{10}d \simeq \sqrt{\frac{C_0\,S\,d}{C_{\text{х}}}}\,\left(1-\frac{C_0^2\,d^2\,S^2}{3C_{\text{х}}^2}\right)\;;\;\;\alpha_1=\frac{æ}{d\,\left(\frac{C_{\text{х}}}{S}+\frac{C_0\,d}{3}\right)}=\frac{æ\,S}{d\,C_{\text{х}\,\text{ЭФФ}}}\,. \tag{16}$$

Отсюда $æ=\alpha_1\,d\,\frac{C_{\text{х}\,\text{эфф}}}{S}$, где эффективна теплоемкость приемника

$$C_{\text{х}\,\text{ЭФФ}}=C_{\text{х}}+\frac{1}{3}C_0\,d\,S\,.$$

Это приближение будет хорошим, если выполнено условие

$$\frac{C_0\,d\,S}{C_{\text{х}}}\ll 1\,, \tag{17}$$

(точнее, если квадрат этой величины мал по сравнению с относительной погрешностью измерения æ). В общем случае мы можем получить из (6) и (9)

$$æ=\frac{\alpha_1\,C_0}{\beta_1^2}=\frac{\alpha_1\,C_{\text{х}}\,d}{S}\,\frac{tg\beta_1\,d}{\beta_1\,d}\,. \tag{18}$$

таким образом, точное значение эффективной теплоемкости равно $C_{\text{х}}=\frac{tg\beta_1\,d}{\beta_1\,d}$. Измеряя $\alpha_1=\frac{1}{T_{\text{н}}-T_{\text{х}}}\,\frac{dT_{\text{х}}}{dt}$ мы найдем æ, если $C_{\text{х}\,\text{ЭФФ}}$ известно.

## 4. Измерение эффективной теплоемкости приемника.

При измерении теплоемкости приемника включается печка нагрева приемника. С учетом мощности $\mathcal{W}$, выделяемой этой печкой, граничное условие (4) заменяется на

$$(z=d)\;:\;\;T(d,t)=T_{\text{х}}\,;\;\;\frac{C_{\text{х}}}{S}\,\frac{\partial T_{\text{х}}}{\partial t}=-æ\,\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{\mathcal{W}}{S}\,. \tag{19}$$

Остальные условия остаются неизменными. Таким образом, в (5) по-прежнему $C=T_{\text{н}}$, $B=0$. При $t\to\infty$ должно установитьс стационарное распределение температур, $\frac{\partial T}{\partial t}=0$, и тогда (19) дает $D=\frac{\mathcal{W}}{æ\,S}$. Поэтому решение следует искать в виде

$$T(z,t)=T_{\text{н}}+\frac{\mathcal{W}}{æ\,S}\,z+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\,e^{-\alpha_m t}\,Sin\beta_m z\,. \tag{20}$$

Подстановка в (19) дает

$$\sum_{m=1}^{\infty}A_m\,e^{-\alpha_m t}\,\left(-\frac{C_{\text{х}}}{S}\,\alpha_m\,Sin\beta_m d+æ\,\beta_m\,Cos\beta_m d\right)=0\,. \tag{21}$$

Это уравнение выполняется при всех $t$, если выражение в скобках равно нулю при любом $m$. Таким образом мы получаем прежний набор $\alpha_m$ и $\beta_m$, а функция (20) при подходящем выборе $A_m$ удовлетворяет произвольному начальному условию.

Считая, что с момента начала эксперимента прошло достаточное время, отбросим все члены с $m>1$. Далее, пусть в некоторый момент $t_0$ температуры с обеих сторон образца сравнялись, $T_{\text{н}}=T_{\text{х}}$. Тогда

$$A_1\,e^{-\alpha t_0}\,Sin\beta_1 d=-\frac{\mathcal{W}}{æ}\,d\,. \tag{22}$$

В этот же момент, согласно (19),

$$\frac{C_{\text{х}}}{S}\,\frac{dT_{\text{х}}}{dt}=\mathcal{W}-æ\,\left(\frac{\mathcal{W}}{æ}+A_1\,e^{-\alpha_1 t_0}\,\beta_1\,Cos\beta_1 d\right)\,. \tag{23}$$

Подставляя $A_1$ из (22), находим

$$\frac{1}{S}\, C_{\text{х}}\, \frac{tg\beta_1 d}{\beta_1\, d} \cdot \frac{dT_{\text{х}}}{dt} = \mathcal{W} = C_{\text{х}\,\text{ЭФФ}}\, \frac{1}{S}\, \frac{dT_{\text{х}}}{dt}\,, \tag{24}$$

где $C_{\text{х}\,\text{ЭФФ}}$ имеет в точности то же значение, что и в предыдущем эксперименте. Таким образом, мы можем не заботиться о поправках на теплоемкость образца. Достаточно определить $C_{\text{х}\,\text{ЭФФ}} = C_{\text{х}}\, \frac{tg\beta_1 d}{\beta_1\, d}$ из (24) и подставить в (18).

## 5. Задание для самостоятельной работы.

При решении нашей задачи мы считали, что приемник изготовлен из материала с бесконечной теплопроводностью. Попробуйте рассмотреть самостоятельно случай, когда это приближение недопустимо. Для этого необходимо решать два уравнени теплопроводности – в материале образца и материале приемника. Условие (4) заменится условием равенства температур и тепловых потоков с обеих сторон от плоскости $z = d$. На второй границе приемника можно принять условие теплоизоляции ($q = 0$) или условие теплоотдачи в среду с постоянной температурой $T_{\text{СР}}$ ($q \sim T - T_{\text{СР}}$).