Определение отношения теплоемкостей $\gamma = C_p / C_v$ для воздуха методом Клемана и Дезорма и по скорости звука.

Метод Клемана и Дезорма.

Теория метода.

Пусть некоторое количество (например, 1 г или моль) газа занимает при давлении P объём V. Если провести медленное (изотермическое) сжатие этого газа до объёма V_1, то его давление, согласно закону Бойля-Мариотта, будет

$$P_1 = P\frac{V}{V_1}. \tag{1}$$

Если теперь газ быстро (адиабатически) расширится до прежнего давления $P_2 = P$, то его объём V_2 можно будет найти из уравнения Пуассона:

$$V_2 = V_1\left(\frac{P_1}{P}\right)^{1/\gamma}, \tag{2}$$

где $\gamma = C_p / C_v$ - отношение молярных (или удельных) теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объёме. Температура газа при этом процессе понизится. Пусть теперь газ изохорически нагреется до первоначальной температуры. Тогда его давление возрастет до величины P_3, которую легко найти, применяя закон Бойля-Мариотта к исходному и конечному состояниям:

$$P_3 = P\frac{V}{V_2}. \tag{3}$$

Подставляя (1) и (2) в (3), находим:

$$P_3 = P_1\left(\frac{P}{P_1}\right)^{1/\gamma}. \tag{4}$$

Если давления P, P_1 и P_3 известны, то из (4) легко найти отношение теплоемкостей γ.

Экспериментальная установка и порядок работы.

Схематический чертеж установки для измерения $\gamma = C_p / C_v$ этим методом показан на рис. 1. Большой сосуд A соединен с манометром B. Трубка ведёт к ручному насосу. С помощью кранов F_1 и F сосуд сообщается с насосом или атмосферным воздухом. Опыт ведут в следующем порядке. Открыв кран F_1, накачивают в сосуд воздух. Закрыв кран, выжидают, пока воздух примет температуру комнаты (давление перестанет изменяться), и измеряют давление P_1. Открывают кран F. Как только давление в сосуде сравняется с атмосферным давлением P (следите по манометру или на слух - когда прекратится шипение), закрывают кран. Выждав, пока в сосуде вновь установится комнатная температура, измеряют давление P_3. По формуле (4) вычисляют величину γ.

Формулу (4) можно преобразовать так, чтобы она не содержала атмосферного давления P. Пусть $P_1 = P + \Delta P_1$; $P_3 = P + \Delta P_3$, где ΔP_1 и ΔP_3 малы по сравнению с P. Тогда

$$\ln P_1 = \ln(P + \Delta P_1) = \ln P + \ln\left(1 + \frac{\Delta P_1}{P}\right) \approx \ln P + \frac{\Delta P_1}{P};$$

$$\ln P_3 \approx \ln P + \frac{\Delta P_3}{P},$$

и (4) переходит в

$$\gamma \approx \frac{\Delta P_1}{\Delta P_1 - \Delta P_3}. \tag{5}$$

Причём вместо ΔP_1 и ΔP_3 можно подставлять непосредственно разности уровней в двух коленах манометра при соответствующих давлениях. Возможная относительная ошибка при использовании формулы (5) имеет величину порядка $(\Delta P_1 / P)^2$. Измерения следует провести не менее 5-7 раз при разных значениях ΔP_1. Накачивая воздух, следует внимательно следить за уровнем жидкости в манометре, чтобы не выплеснуть её.

Определение C_p / C_v по скорости звука.

Если в газе распространяется звуковая волна, то частицы газа (под "частицами"мы здесь понимаем не молекулы, а макроскопические объемы, размеры которых малы по сравнению с длиной волны звука, но очень велики по сравнению с межмолекулярными расстояниями) испытывают периодические разрежения и сжатия. При обычных частотах звука теплообмен между областями сжатия и разрежения практически отсутствует, так что процесс этот является адиабатическим. Поэтому величина скорости звука оказывается зависящей от отношения теплоемкостей $\gamma = C_p / C_v$, и измерение скорости звука является одним из точнейших способов определения величины γ.

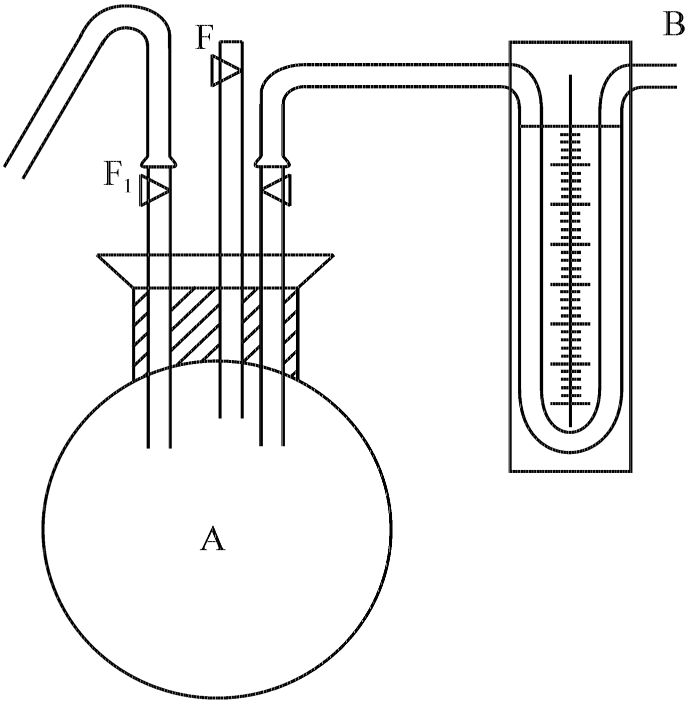

Рис. 1.

Вывод волнового уравнения.

Пусть звуковая волна распространяется в трубе сечения S. Направим ось x по оси трубы и рассмотрим движение тонкого слоя газа толщиной δx (рис.2). На этот слой действуют силы давления со стороны прилегающих участков газа. Если давление всюду одинаково, $P_1 = P_2$, то сила, действующая на выделенный слой слева, уравновешивается такой же силой, действующей справа, и слой будет неподвижным.

Но в звуковой волне давление меняется от точки к точке, так что $P_1 \neq P_2$. Полная сила, действующая на наш слой, будет равна

$$\delta F = (P_1 - P_2)S.$$

Умножая и деля на δx, получаем

$$\delta F = \frac{P_1 - P_2}{\delta x} S\,\delta x = -\frac{\partial P}{\partial x}\delta V, \tag{6}$$

где $\delta V = S\,\delta x$ - объем выделенного слоя, а градиент давления:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{\delta x}.$$

Уравнением движения частицы будет:

$$\rho\delta V\omega = \rho\delta V \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \delta F = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \delta V, \tag{7}$$

где U - смещение частицы от равновесного положения, $\omega = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ - ее ускорение, ρ - плотность газа, $\rho\delta V$ - масса частицы. Из (7) следует уравнение Эйлера:

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} \tag{8}$$

Величина давления в каждой точке определяется удельным объемом газа в этой точке. В равновесии удельный объем равен V_0 и давление P_0. В звуковой волне удельный объем равен

$$V = V_0 + V_1, \tag{9}$$

где V_1 - переменная часть удельного объема, причем $V_1 \ll V_0$.

Соответственно давление

$$P = P_0 + P_1, \tag{10}$$

где $P_1 \ll P_0$. Связь между P и V для адиабатического процесса выражается уравнением Пуассона:

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma. \tag{11}$$

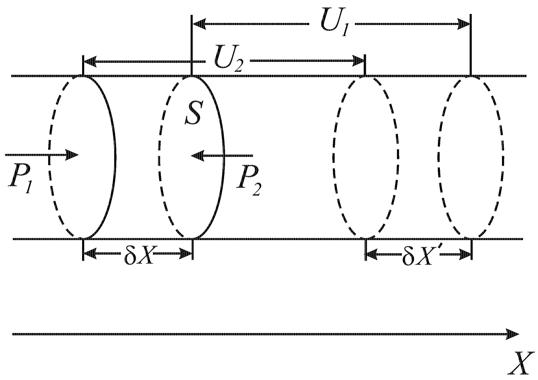

Рис. 2.

Согласно (9) и (10),

$$PV^{\gamma} = (P_0 + P_1)(V_0 + V_1)^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma} + \gamma P_0 V_1 V_0^{\gamma-1} + V_0^{\gamma} P_1 + \ldots \tag{12}$$

и следующими членами можно пренебречь, поскольку P_1 и V_1 малы. Подставляя (12) в уравнение Пуассона (11), найдем:

$$P_1 = -\gamma \frac{P_0}{V_0} V_1. \tag{13}$$

Величину V_1 можно найти, рассматривая деформацию показанного на рис. 2 слоя. Ограничивающие его грани смещаются, вообще говоря, на различные отрезки U_1 и U_2. Поэтому толщина этого слоя изменяется от величины δx до величины

$$\delta x' = \delta x + U_2 - U_1.$$

Но $U_2 - U_1 = \frac{\partial U}{\partial x}\delta x$, где $\frac{\partial U}{\partial x}$ - градиент величины смещения. Таким образом,

$$\delta x' = \delta x\left(1 + \frac{\partial U}{\partial x}\right). \tag{14}$$

Объем слоя δV также увеличивается в (1+ $\frac{\partial U}{\partial x}$) раз. Поскольку масса газа в этом слое при движении не изменяется, то и удельный объем возрастает в том же отношении:

$$V = V_0\left(1 + \frac{\partial U}{\partial x}\right); \qquad V_1 = V_0 \frac{\partial U}{\partial x} \tag{15}$$

Таким образом, окончательно

$$P_1 = -\gamma P_0 \frac{\partial U}{\partial x} \tag{16}$$

и

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(P_0 + P_1) = \frac{\partial P_1}{\partial x} = -\gamma P_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение движения (8) , получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \gamma P \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{17}$$

где вместо P_0 мы пишем для краткости P (поскольку $P \approx P_0$). Уравнение (17) носит название волнового. Его решением является синусоидальная волна

$$U = A\cos\omega\left(t \pm \frac{x}{v}\right), \tag{18}$$

где минус относится к волне, бегущей в положительном направлении оси x, а плюс - к волне, бегущей в отрицательном направлении. (Общим решением уравнения (17) является волна произвольной формы $U = f\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$, где f - произвольная функция своего аргумента. Но нас интересует только синусоидальная волна частоты ω, поскольку в нашей установке волны возбуждаются синусоидально колеблющимся с этой частотой вибратором).

Чтобы убедиться в том, что функция (18) действительно является решением, нужно подставить ее в уравнение (17). Тогда получим:

$$-\rho\omega^2 U = -\gamma P \frac{\omega^2}{v^2} U.$$

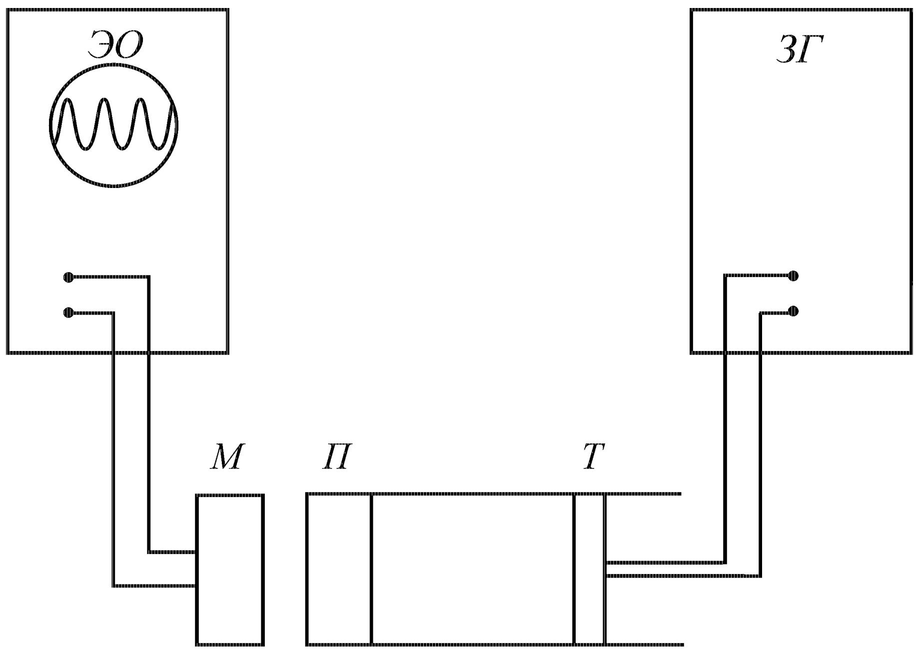

Рис. 3.

Это равенство справедливо, если скорость волны имеет значение

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}. \tag{19}$$

Пользуясь уравнением Менделеева-Клапейрона $PV = \frac{m}{\mu}RT$, где μ - молярная масса газа, получаем окончательное выражение для скорости звука (формулу Лапласа):

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}. \tag{20}$$

Измерение скорости звука методом стоячих волн.

Установка для измерения скорости звука изображена на рис. 3. Она состоит из стеклянной трубы, на одном конце которой помещен источник звука - телефон Т, другой конец закрыт плотной пластинкой П с отверстием, против которого помещается микрофон М. Колебания мембраны телефона возбуждаются переменным током звуковой частоты от звукового генератора ЗГ. Возникающий в микрофоне электрический сигнал подается на вертикально отклоняющие пластины электронного осциллографа ЭО. Звуковая волна, возбуждаемая мембраной телефона Т, отражается от пластинки П. Отраженная волна интерферирует с "прямой"волной, идущей от телефона, образуется суммарная звуковая волна. Интенсивность ее зависит от расстояния L между пластинкой П и телефоном Т и от частоты ν звуковых колебаний.

Если расстояние L равно целому числу полуволн звука

$$L = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{v}{2\nu},$$

где n - целое число, v - скорость звука, то в трубе устанавливается интенсивная стоячая волна (наступает звуковой резонанс). Наблюдая возникновение резонанса, можно определить скорость звука. Для фиксирования моментов резонанса можно действовать двумя способами:

1. изменять расстояние L, оставляя частоту постоянной;

2. изменять частоту при неизменном расстоянии L.

Рассмотрим сначала первый способ. Изменяя расстояние ПТ, находят такое положение телефона Т, при котором на экране осциллографа происходит резкое увеличение амплитуды колебаний (звуковой резонанс), фиксируют положение L_n телефона по шкале, нанесенной на поверхности трубы. Перемещая телефон Т ближе к торцу трубы (или, наоборот, дальше), находят ряд последовательных резонансов, каждый раз фиксируя положение телефона:

$$L_n, L_{n+1}, \ldots, L_{n+k},$$

причем

$$L_n = n\frac{\lambda}{2}, L_{n+1} = (n+1)\frac{\lambda}{2}, \ldots, L_{n+k} = (n+k)\frac{\lambda}{2}.$$

Проводят измерения положения телефона сначала при увеличении расстояния ПТ, потом при его уменьшении. Полученные результаты изображают на графике, откладывая по оси абсцисс $n+k$, а по оси ординат L_{n+k}. Через полученные точки проводят прямую, определяют λ и, зная длину звуковой волны и частоту звуковых колебаний ν (по шкале звукового генератора), находят скорость звука.

При измерении вторым способом расстояние ПТ оставляется неизменным, а частота звуковых колебаний изменяется с помощью ЗГ. Фиксируют последовательные резонансные частоты:

$$\nu_n, \nu_{n+1}, \nu_{n+2}, \ldots, \nu_{n+k},$$

внимательно следя за картиной на экране осциллографа сначала при увеличении частоты, потом при ее уменьшении. Очевидно:

$$\begin{aligned} L =& n\frac{\lambda_n}{2} = n\frac{v}{2\nu_n}; \\ L =& (n+1)\frac{\lambda_{n+1}}{2} = (n+1)\frac{v}{2\nu_{n+1}}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L =& (n+k)\frac{\lambda_{n+k}}{2} = (n+k)\frac{v}{2\nu_{n+k}}, \end{aligned} \tag{21}$$

где - L расстояние между П и Т. Полученные результаты измерения изображают на графике, откладывая по оси абсцисс $n+k$, а по оси ординат ν_{n+k}. Через полученные точки проводят прямую. По угловому коэффициенту этой прямой находят скорость звука v.

Порядок измерений.

1. Включают осциллограф и звуковой генератор (описания приборов выдаются в лаборатории). Исходя из примерного значения скорости звука 300 м/сек, рассчитывают, в каком диапазоне частот следует вести измерения, чтобы изменение расстояния ПТ на $\frac{\lambda}{2}$ было удобно для измерения.

2. Подбирают амплитуду колебаний генератора и усиление на осциллографе так, чтобы на экране наблюдались колебания достаточной амплитуды. Останавливают картину на осциллографе, подбирая частоту развертки.

3. Производят измерение скорости звука методом изменения расстояния ПТ для 3-5 частот.

4. По формуле Лапласа (20) рассчитывают $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$. При этом за температуру воздуха берут температуру в лаборатории. Молярную массу воздуха μ находят из его плотности при $0°C$ и давлении 760 мм рт. ст. ($\rho = 1.2929 \cdot 10^{-3}$г/см^3).

5. Производят измерение скорости звука методом изменения частоты для нескольких расстояний ПТ, изменяя частоту от 1000 Гц и выше. Вычисляют γ.

6. Сравнивают полученные значения γ между собой и с результатами измерения γ методом Клемана-Дезорма.