Лабораторная работа № 29

Изучение распределения случайных ошибок измерений

Неконтролируемые причины, приводящие к появлению ошибок измерений, могут быть самыми разнообразными: это и неопределённость самой измеряемой величины[1], и колебания других величин, не имеющих прямого отношения к измеряемой величине, но влияющих на показания приборов и вообще на результат измерений, и несовершенство процедуры измерений, приборов и органов чувств экспериментатора. Независимо от их природы мы можем объединить все такие искажающие влияния под общим названием **помехи** или **шума**, который накладывается на "полезный сигнал" – истинное значение измеряемой величины $x_{\text{ист}}$. Результат измерения $x_{\text{изм}}$ является суммой полезного сигнала $x_{\text{ист}}$ и сигнала помехи δx, т. е. ошибки

$$x_{\text{изм}} = x_{\text{ист}} + \delta x \tag{I}$$

В отдельных опытах ошибка δx принимает значения δx_j (j = 1, 2, …– номер измерения), которые никак не связаны между собой и совершенно непредсказуемы. Такие величины носят название **случайных**, и для их описания применяются методы математической статистики (теории вероятностей).

Результат измерения $x_{\text{изм}}$, поскольку он содержит случайную величину – ошибку, также является случайной величиной, принимающей в отдельных опытах значения:

$$x_j = x_{\text{ист}} + \delta x_j \tag{2}$$

Полезно обратить внимание на терминологию. Как в математике следует различать саму функцию и принимаемые ею численные значения, так и здесь мы говорим о величинах δx, $x_{\text{изм}}$ и о **значениях** δx_j, x_j, которые они принимают в отдельных опытах. Это различие не всегда проводится в словесных определениях: говорят, что δx – ошибка (величина), а δx_j – ошибки (значения этой величины).

В действительности мы не знаем истинного значения измеряемой величины[2] и соответственно не знаем значений ошибки. Нам известны только значения x_j, которые принимает величина $x_{\text{изм}}$; о них мы и будем говорить в дальнейшем.

Результаты отдельных экспериментов, как уже говорилось, непредсказуемы, но это не значит, что они не подчинены никакой закономерности. Действительно, помехи обусловлены реальными физическими воздействиями, каждое из которых подчинено каким-то законам. Совместное действие большого числа отдельных независимых помех приводит к невозможности предсказать результат *отдельного измерения*, но их закономерный характер позволяет установить, **насколько часто** будет встречаться то или иное конкретное значение $x_{\text{изм}}$ при большом числе повторных измерений. Иначе говоря, законы, которым подчиняются результаты измерений, **существуют и имеют статистический характер.**

Мы можем поставить задачу – установить эти законы и воспользоваться ими для достижения основной цели – получить из опыта возможно лучшую ***оценку*** истинного значения измеряемой величины x и **охарактеризовать качество этой оценки**.

---

[1] Надо помнить, что, проводя измерения какой-либо физической величины, мы всегда имеем в виду какую-нибудь модель, упрощающую реальную действительность. Например, если мы будем говорить о "диаметре d Земли", приближенно считая её шаром, то при измерениях, естественно, обнаружатся колебания d, вызванные расхождением между моделью и действительностью. Под "истинным значением" d естественно понимать какое-то среднее значение. Мы можем улучшить модель, вводя вместо диаметра более адекватные понятия размеров, но любая модель рано или поздно наталкивается на подобные трудности.

[2] При градуировке приборов, т.е. при наличии двух приборов – более и менее точного – показание эталонного или образцового прибора часто может быть с достаточной для практических целей точностью принято за истинное значение, т. е. мы можем предполагать, что соответствующая ошибка мала (но, конечно, не равна нулю).

Итак, мы должны выяснить, как часто случайная величина $x_{изм}$ принимает определенные наперед заданные значения $x_1, x_2, \dots$. Заметим, прежде всего, что в таком виде вопрос не имеет смысла. Действительно, если физическая величина x может принимать непрерывный ряд значений, то $x_{изм}$ может быть любым числом. Тогда вероятность обнаружить среди конечного набора численных значений какое-то наперед заданное число практически равна нулю.

> Если вы попросите всех ваших сокурсников назвать произвольные числа из интервала 0…10 – найдется ли среди них число 4.9487526750002? Число 5, вероятно, найдется, но природа не имеет человеческой склонности к целым числам!

Содержательным будет только вопрос, сколько значений $x_{изм}$ лежит в определенном интервале, например $x_1 < x_{изм} < x_2$. Предположим, что мы провели N измерений величины x и получили набор значений $x_{изм}$. Выделим на оси x такой интервал $x_{\min} < x < x_{\max}$, что все значения лежат внутри этого интервала. Разобьем его на m равных отрезков длиной $\Delta x = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{m}$ и подсчитаем, сколько значений $x_{изм}$ из общего числа N результатов измерений попадает в каждый из этих промежутков. Пусть, например, в промежутке Δx_k от $x_k = x_{\min} + k\Delta x$ до $x_{k+1} = x_k + \Delta x$ лежит Δn_k результатов[3]. Построим на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2,\dots m-1)$ прямоугольник с высотой $\dfrac{\Delta n_k}{N\Delta x}$.

Мы получим тогда график, подобный показанному на **Рис.1** и называемый ***гистограммой***.

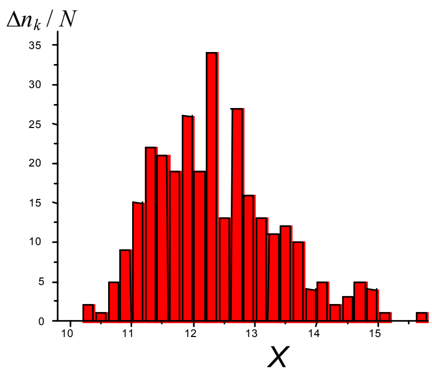


Рис.1.

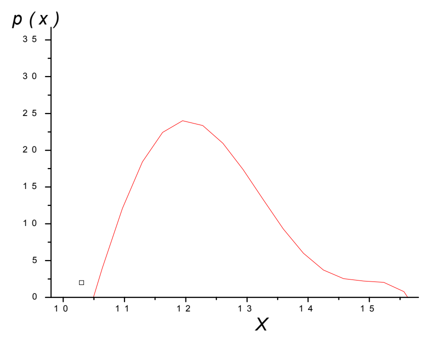


Рис.2.

Площадь каждого из прямоугольников равна $\dfrac{\Delta n_k}{N}$ – **относительной частоте** попадания результатов в промежуток Δx_k.

Если число измерений N невелико, гистограмма может иметь довольно неправильный вид, зависящий от случайного выпадения тех или иных значений $x_{изм}$, но если N растет, то в форме гистограммы все в большей и большей степени проявляются закономерности, определяемые физической природой процессов, происходящих

[3] для определенности можно договориться относить к этому отрезку также значения $x_{изм}$, равные в точности x

при измерении. В пределе[4], при $N \to \infty$, относительная частота $\frac{\Delta n_k}{N}$ принимает вполне определенное (уже не случайное) значение, которое называется ***вероятностью*** попадания $x_{\text{изм}}$ в интервал Δx_k :

$$P\left(x_k \le x_{\text{изм}} < x_{k+1}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{\Delta n_k}{N}\right)$$

Если мы, кроме того, устремим m к бесконечности, так что $\Delta x \to 0$, то верхушки прямоугольников на **Рис.1** сольются в плавную кривую (см. **Рис.2**), ординаты которой

$$p(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\Delta n_k}{N\Delta x}\right) \tag{3}$$

представляют собой значения ***плотности вероятности*** получения результата $x_{\text{изм}} = x$.

Если мы выделим на оси абсцисс произвольный промежуток $a \le x \le b$, то **площадь, заключенная под этой кривой между отрезками $x = a$ и $x = b$, равна вероятности того, что x попадет в указанный промежуток:** $P(a \le x_{\text{изм}} \le b)$ отсюда название функции $p(x)$ – плотность вероятности.

Кривая плотности распределения вероятностей, подобная показанной на **Рис.2**, наиболее полно отражает условия эксперимента и дает наиболее детальные предсказания о поведении случайной величины $x_{\text{изм}}$. Никакие более конкретные предсказания, касающиеся результатов отдельных измерений, невозможны. С другой стороны, самое большее, что можно получить из опыта – это построить настолько хорошую гистограмму (для тагих больших N и m), что она будет практически совпадать с кривой $p(x)$.

Гистограмма и кривая плотности вероятности $p(x)$ для случайной величины $x_{\text{изм}}$ описывают также распределение ошибок, т.е. значений случайной величины $\delta x = x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}$. Действительно, достаточно перенести начало координат в точку $x = x_{\text{ист}}$, и тогда на оси абсцисс вместо $x_{\text{изм}}$ будут отложены значения δx. Таким образом, эти кривые характеризуют точность эксперимента. Если они имеют вид острого пика, вершина которого близка к $x_{\text{ист}}$ $(\delta x = 0)$, а по обе стороны от вершины наблюдается резкий спад функции $p(x)$, то эксперимент имеет высокую точность (большие ошибки встречаются реже). Если существует заметное неравенство частот появления ошибок положительного и отрицательного знака, то гистограмма становится несимметричной и при этом вершина пика отклоняется от $x = x_{\text{ист}}$. Большая ширина пика означает наличие сильных помех **случайного** характера.

На практике редко удается провести такое большое число измерений, чтобы можно было построить хорошую гистограмму, поэтому вместо графического построения кривой распределения обычно определяют расчётом параметры функции $p(x)$. Для этого нужно, конечно, сделать какие-то предположения о форме этой функциональной зависимости. Можно показать[5], что **если ошибки вызываются очень большим набором независимых помех, каждая из которых вносит очень малый положительный или отрицательный вклад**, то возникает распределение ошибок по так называемому ***нормальному закону,*** описываемое **функцией Гаусса**:

---

[4] Определение "предела" в теории вероятностей **не совпадает с аналогичным определением в математическом анализе**, и мы здесь не вполне правомерно используем обозначение **"lim"**. В теории вероятностей само "стремление" к "пределу" **носит вероятностный характер**.

[5] Это доказывает так называемая "центральная предельная теорема" теории вероятностей

$$p(x) = p(\delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x - x_{ист})^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta x^2}{\sigma^2}}, \qquad (4)$$

где e = 2.718281828… – основание натуральных логарифмов.

Формула (4) содержит только два параметра – $x_{ист}$ и σ – и зная их, можно целиком построить кривую $p(x)$.

Условия, при которых ошибки распределены по нормальному закону, часто выполняются на опыте. В качестве удобного приближения этот закон нередко используют при обработке наблюдений и тогда, когда реальное распределение отличается от нормального.

Функция Гаусса (**Рис.3**)

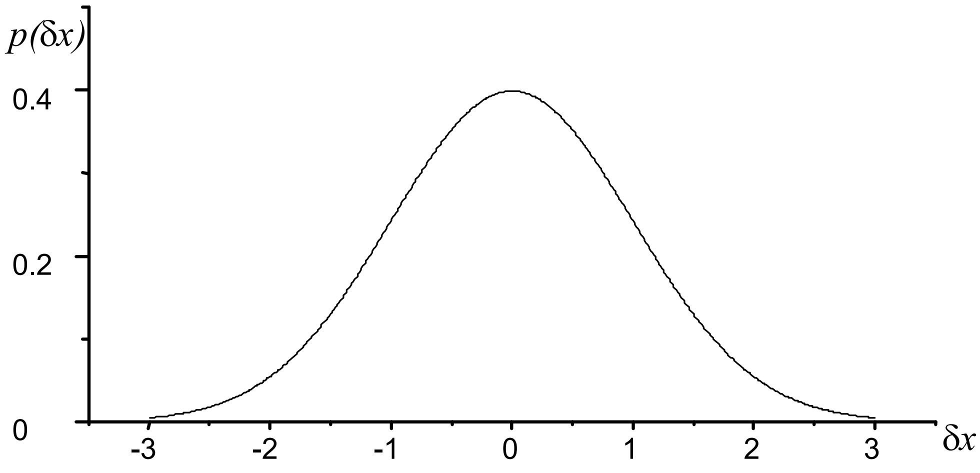


Рис.3. Функция Гаусса.

имеет следующие основные свойства, которые легко понять исходя из упомянутых предпосылок её вывода:

1. Кривая $p(x)$ симметрична относительно $x_{ист}$ – положительные и отрицательные ошибки встречаются одинаково часто. Это и естественно, если все помехи имеют абсолютно случайный характер (а тогда нет систематического преобладания случайных ошибок положительного знака над отрицательными).

2. Кривая $p(x)$ имеет вид колокола: пик ее лежит при $x = x_{ист}$ $(\delta x = 0)$; довольно тупая вершина указывает на то, что любые малые значения ошибок почти равновероятны, а затем наблюдается быстрый спад, указывающий на малую вероятность больших ошибок. Это и понятно, так как для получения большой ошибки все источники помех должны одновременно дать вклад одного знака, что случается очень редко.

3. Полная площадь под кривой $p(x)$ равна 1 (это обеспечивается нормировочным множителем $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ перед экспонентой). Это необходимое условие, так как вероятность совершения хоть какой-нибудь ошибки равна единице (достоверное событие), иначе говоря, из N измерений все N обязательно содержат какую-нибудь ошибку из интервала $-\infty < \delta x < \infty$.

4. Функция $p(x)$ нигде не обращается в нуль, так что с какой-то (хотя бы очень малой) вероятностью ошибка может иметь сколь угодно большую величину. Этот результат получается, если число источников помех принимается не просто очень большим, а бесконечным. Осторожнее будет говорить, что $p(x)$ **практически** равна нулю при очень больших δx.

Параметр σ характеризует ширину распределения: при $\delta x = \sigma$ величина $p(x)$ в $\sqrt{e} = 1.649...$ раз меньше, чем в максимуме $(\delta x = 0)$. В интервале $-\sigma \le \delta x < \sigma$ -заключена б**о**льшая часть площади под кривой $p(x)$: 68%, иначе говоря, **68%** всех результатов имеют ошибку, по абсолютной величине не превосходящую σ. В то же время **95%** результатов измерений удовлетворяют условию $|\delta x| < 2\sigma$, а **99.7%** – условию $|\delta x| < 3\sigma$.

Ввиду важного значения параметров σ и σ^2 оба они имеют специальные названия: σ^2 называется ***дисперсией случайной величины*** $x_{\text{изм}}$ или δx, а σ называется ***среднеквадратической ошибкой*** (в соответствии с физическим смыслом, о котором речь пойдет чуть ниже).

Если мы проведем очень большое число измерений, позволяющее построить гистограмму, совпадающую с кривой плотности вероятности $p(x)$, то оценку истинного значения измеряемой величины даст положение пика этой кривой. Более удобным и более точным методом получения этой оценки будет вычисление среднего значения $\overline{x_{\text{изм}}}$ (черта над обозначением величины здесь и дальше означает усреднение по большому числу N измерений):

$$\overline{x_{\text{изм}}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{m} x_k \Delta n_k = \\ = \sum_{k=1}^{m} x_k \frac{\Delta n_k}{N\Delta x_k}\Delta x_k \approx \sum_{k=1}^{m} x_k\, p(x_k)\Delta x_k \tag{5}$$

(напомним, что j – номер измерения, а k – номер одного из отрезков, на которые мы разбили интервал изменения величины $x_{\text{изм}}$. Здесь последовательно выполнены следующее операции.

1. Величины x_j разбиты на m групп, в каждой из которых $x_k \le x_j < x_k + \Delta x_k$,
2. в каждой группе все x_j приближенно заменены на x_k,
3. величины $\dfrac{\Delta n_k}{N\Delta x_k}$ приближенно заменены на $p(x_k)$.

Если $N \to \infty, m \to \infty$, то приближенные равенства станут точными, и, в силу симметрии функции $p(x)$ относительно точки $x = x_{\text{ист}}$ мы получим $\overline{x_{\text{изм}}} = x_{\text{ист}}$.

Действительно, перепишем последнее равенство в (5) в виде

$$\overline{x_{\text{изм}}} = \sum_{k=1}^{m}(x_k - x_{\text{ист}})\,p(x_k)\Delta x_k + x_{\text{ист}}\sum_{k=1}^{m} p(x_k)\Delta x_k = x_{\text{ист}} \tag{6}$$

Здесь первая сумма равна нулю, поскольку каждому положительному слагаемому $\delta x_k \cdot p(\delta x_k)$ соответствует равное ему по модулю отрицательное слагаемое $-\delta x_k \cdot p(-\delta x_k)$, ведь $p(x)$– четная функция! Вторая сумма равна единице, поскольку она представляет собой площадь под всей кривой $p(x)$. Остается в итоге множитель перед второй суммой.

Если число измерений N конечно, то равенство $\overline{x_{изм}} = x_{ист}$ уже не будет точным, но и в этом случае $\overline{x_{изм}}$ **является наилучшей оценкой истинного значения** x. Будем обозначать эту найденную оценку через x_0:

$$\boxed{x_0 \equiv \overline{x_{изм}} \approx x_{ист}} \tag{7}$$

Для определения ширины кривой $p(x)$ несколько удобнее не графический, а расчетный метод. Вычислим **средний квадрат ошибки:**

$$\overline{\delta x^2} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta x_j^2 \approx \sum_{k=1}^{m}\delta x_k^2\,\frac{\Delta n_k}{N\Delta x_k}\Delta x_k \approx \sum \delta x_k^2\, p(x_k)\Delta x_k \tag{7}$$

(здесь выполнены те же преобразования, что и в (5)). Последняя сумма для функции (4) вычисляется методами интегрального исчисления, и вычисление дает

$$\boxed{\overline{\delta x^2} = \sigma^2, \quad \sigma = \sqrt{\overline{\delta x^2}}} \tag{8}$$

Средний квадрат ошибки отдельного измерения равен **дисперсии**, а σ имеет смысл **среднеквадратической ошибки.** В действительности именно формулы (8) считаются определением величины σ, независимо от вида распределения $p(x)$. Так, для распределения

$$p(x) = \begin{cases} 1/2a & \text{при } |\delta x| \le a \\ 0 & \text{при } |\delta x| \le a \end{cases}$$

из определения (8) следует: $\sigma = a/\sqrt{3}$.

Если мы провели небольшое число измерений n и нашли **оценку истинного значения**

$$\boxed{x_0 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j} \tag{9}$$

то нас будет, конечно, интересовать *качество этой оценки*. Подчеркнем, прежде всего, что x_0 **есть случайная величина (функция n случайных величин – результатов отдельных измерений)**, так что следует говорить в действительности, о **распределении** величины x_0, т. е. о **вероятности** встретить различные значения x_0. Методами интегрального исчисления можно показать, что, **если распределение величины $x_{изм}$ является гауссовым, то и распределение оценки x_0 будет иметь такую же функциональную форму**:

$$p(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x_0 - x_{ист})^2}{\sigma_0^2}} \tag{10}$$

Центр этого распределения, естественно, также лежит при $x_0 = x_{\text{ист}}$, но величина дисперсии σ_0 будет другой, мы без труда найдем дисперсию величины x_0 элементарными методами, исходя из формулы, аналогичной (8):

$$\sigma_0^2 = \overline{(x_0 - x_{\text{ист}})^2} \tag{11}$$

где среднее уже, конечно, не по n измерениям, как в (9), а по очень большому числу N **возможных серий таких измерений,** по n измерений в каждой. Подставляя x_0 из (9), получим после громоздких, но тривиальных выкладок

$$\sigma_0^2 = \overline{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j - x_{\text{ист}}\right)^2} = \overline{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{\text{ист}})\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\overline{(x_j - x_{\text{ист}})^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=j+1}^{n}\overline{(x_i - x_{\text{ист}})(x_j - x_{\text{ист}})}\right]$$

Под знаком первой суммы стоит n одинаковых слагаемых $\overline{\delta x_j^2} = \overline{\delta x^2} = \sigma^2$. Под знаком второй суммы стоит среднее произведение ошибок двух независимых измерений, $\overline{\delta x_i \delta x_j}$. Поскольку ошибки одинаково часто бывают положительными и отрицательными, это среднее будет, очевидно, нулем.

Таким образом,

$$\boxed{\sigma_0^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2} \tag{13}$$

Дисперсия среднего из результатов n измерений в n раз меньше, чем дисперсия результата отдельного измерения, следовательно, x_0 – оценка для $x_{\text{ист}}$, в $\sqrt{n}$ раз лучшая, чем любой из одиночных отсчетов x_j.

До сих пор мы вычисляли дисперсию так, как будто нам было известно истинное значение измеряемой величины. На опыте, однако, оно не бывает известно, и мы вынуждены воспользоваться вместо $x_{\text{ист}}$ его *оценкой* x_0 и вычислить **отклонения результатов отдельных измерений от среднего**: $x_j - x_0 = x_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$. Это тоже случайные величины, и мы можем найти их дисперсию.[6] Для

[6] Подчеркнем, что законы распределения случайных величин $(x_j - x_{\text{ист}})$ и $(x_j - x_0)$ **различны,** следовательно, различны их дисперсии. Это вызвано только тем, что мы подставили вместо истинного значения величины его оценку. С аналогичным обстоятельством мы столкнемся далее, когда вынуждены будем подставить вместо σ его оценку по малой выборке *s*.

нахождения дисперсии величины $(x_j - x_0)$ предварительно вычтем из x_j и x_0 величину $x_{\text{ист}}$:
$x_j - x_0 = (x_j - x_{\text{ист}}) - (x_0 - x_{\text{ист}}) = \delta x_j - \delta x_0$

Далее,

$$\overline{(x_j - x_0)^2} = \overline{(\delta x_j - \delta x_0)^2} = \overline{\left[\delta x_j\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{i \neq j} \delta x_j\right]^2} =$$

$$= \overline{\delta x_j^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i \neq j}\overline{\delta x_i^2} + \{\ldots\}$$

где {точками**…**} заменены члены, в которые входят средние произведения разных $\delta x_i, \delta x_j$, равные нулю. Поскольку $\overline{\delta x_i^2} = \overline{\delta x_j^2} = \sigma^2$ и число членов во второй сумме равно $n - 1$, получаем

$$\overline{(x_{\text{изм}} - x_0)^2} = \overline{(\delta x_j - \delta x_0)^2} = \sigma^2\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}(n-1)\right] = \sigma^2\,\frac{n-1}{n}. \quad (14)$$

Дисперсия отклонений $\overline{(x_{\text{изм}} - x_0)^2}$ не может быть найдена из опыта, так же как и σ^2, поскольку для этого надо было бы усреднить отклонения по очень большому числу серий измерений. Но в качестве разумного приближения мы можем положить

$$\overline{(x_{\text{изм}} - x_0)^2} \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_0)^2 \quad (15)$$

Отсюда мы получим **оценку для дисперсии отдельного измерения**[7]

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_0)^2} \quad (16)$$

и для **дисперсии среднего результата**

$$\boxed{s_0^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_0)^2} \quad (17)$$

[7] Оценка, рассчитанная по выражению (16), точнее, случайная величина $\chi^2 = (n-1)\dfrac{s^2}{\sigma^2}$ распределена по закону, называемому "распределение χ^2" (**хи-квадрат**). Вид распределения χ^2 зависит от параметра $(n-1)$, называемого "количеством степеней свободы".

Заметим, что при большом числе измерений в этих формулах можно пренебречь единицей в сравнении с n. При малом же числе измерений этого делать нельзя, поскольку сами оценки, основанные на замене **генеральных средних** (т.е. средних по **очень большому** числу N измерений) на **выборочные средние** (т.е. средние по "выборке", состоящей из малого числа n результатов) мало надежны. Поясним, что это означает.

Величина s_0 может быть принята за меру погрешности, содержащейся в оценке x_0; для более определенного суждения об этой погрешности вводят понятия ***доверительной вероятности*** и ***доверительного интервала.*** По известному числу измерений и по заданной **доверительной вероятности** P можно найти коэффициенты $a_n(P)$, с помощью которых затем находится **доверительный интервал**, соответствующий этой вероятности:

Доверительная вероятность того, что $\left|x_0 - x_{\text{ист}}\right| \le s_0 \cdot a_n(P)$, **равна** P (18)

При большом n статистическая оценка s_0 весьма хорошо воспроизводит точное значение σ_0, и различием между ними можно пренебречь; поэтому доверительная вероятность, соответствующая доверительному интервалу $x \in [x_0 - s_0; x_0 + s_0]$, при большом n равна 68%, как мы видели выше из свойств нормального распределения.

Однако при малом n мы уже должны учитывать, что мы располагаем не точным значением σ_0, а лишь s_0, и умножать на коэффициент $a_n(P)$ мы будем вынуждены, таким образом, величину, которая не вполне точно отражает истинную дисперсию оценки x_0. Из-за этого обстоятельства нам нужно для нахождения доверительного интервала **совместно учитывать** неопределенность **обеих** статистических оценок: как x_0, так и s_0. Результат такого совместного учета сведется просто к тому, что мы для каждой пары значений n и P получим другие, несколько большие значения коэффициентов $a_n(P)$. Основой для их расчета[8] в этом более сложном случае является **распределение Стьюдента.**

Распределение Стьюдента строится для случайной величины $T = \sqrt{n}\,\dfrac{x_0 - x_{\text{ист}}}{s}$ и **совместно учитывает** как нормальный закон распределения оценки x_0, так и закон "хи-квадрат" распределения оценки s. Если бы в знаменателе выражения для *T* была константа σ, то закон распределения *T*, очевидно, не отличался бы по форме от нормального закона распределения x_0. Отличие распределения Стьюдента от гауссова есть прямое последствие замены σ на оценку (случайную величину) s с ее "хи-квадрат"-распределением. Как вы помните, мы выше уже сталкивались с похожим эффектом при выводе формулы (14).

Практические расчеты показывают, что даже при малых n учет ненадежности оценки s_0 хотя и уточняет картину, но не приводит ни к чему качественно новому. При малом n вероятность $x \in [x_0 - s_0; x_0 + s_0]$ меньше, чем при большом n, ввиду ненадежности оценки (16), но даже при трех измерениях она превышает 60%, а при десяти – 65%, так что это достаточно хорошая мера погрешности.

Можно выбрать в качестве меры погрешности и другие доверительные интервалы, соответствующие более высоким значениям доверительной вероятности: для этого существуют специальные **таблицы** распределения Стьюдента. Так, например, при $n = 5,\ P = 80\%$ эти таблицы дают $a_n(P) = 1.53$, или

[8] Рассмотрение вывода распределения Стьюдента выходит далеко за рамки настоящего описания. Здесь мы лишь касаемся его происхождения и общих принципов его использования.

$$x = x_0 \pm 1.53 \cdot s_0 \qquad (19)$$

Для упрощения вычислений можно вместо среднеквадратического отклонения вычислить среднее абсолютное отклонение

$$\Delta x = \sum_{j=1}^{n} \left| x_j - x_0 \right| \approx 0.8 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - x_0 \right)^2} \approx 0.8 \sqrt{\frac{n-1}{n}} \sigma = 0.8 \sqrt{n-1} \sigma_0 \qquad (20)$$

(коэффициент 0.8 получен численным интегрированием распределения (4)).

При пяти измерениях $\Delta x \approx 1.6\sigma_0$; сравнивая с (19) мы видим, что интервал $x_0 \pm \Delta x$ имеет доверительную вероятность несколько более 80%. На этом основан упрощенный метод оценки погрешностей, принятый при не очень ответственных измерениях. Благодаря наличию в широком пользовании микрокалькуляторов со встроенной функцией статобработки данных, в подобном упрощении уже нет необходимости.

При оценке погрешностей измерений в большинсткве работ в нашей лаборатории вам вполне достаточно будет ограничиться использованием соотношения (13), из которого следует, что с ростом числа измерений n погрешность уменьшается приблизительно как $1/\sqrt{n}$ (коэффициенты $a_n(P)$ тоже убывают с ростом n, но более медленно).

В данной работе предлагается провести большое количество прямых измерений одной и той же величины в таких условиях, когда точность отсчета велика и случайные ошибки наводки[9], вызванные малой чувствительностью метода регистрации, играют доминирующую роль. По результатам этих измерений изучаются на опыте основные закономерности, которым подчиняется распределение случайных ошибок. Ввиду большого объема измерений работа требует кооперации между несколькими студентами. Подробные указания о порядке работы следует получить у преподавателя; ниже описывается типовое задание.

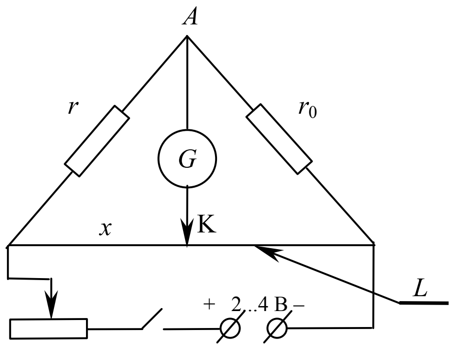
[9] Ошибками наводки (от процедуры наводки зрительной трубы на объект) часто называют ошибки собственно процесса измерения, в отличие от ошибок отсчета и ошибок градуировки.

Обозначения.

Обозначение	Физический смысл
$x_{\text{изм}}$	Результат измерения
$x_{\text{ист}}$	Истинное значение измеряемой величины
δx	Ошибка измерения
δx_j, x_j,	Значения (реализации) ошибки измерения и измеряемой величины.
N	1) Количество измерений в большой выборке (генеральной совокупности) 2) Количество групп измерений (малых выборок) в генеральной совокупности выборок
m	Количество отрезков разбиения на гистограмме реализаций случайной величины
$k = 0...m-1$	Номер отрезка разбиения на гистограмме
x_k	Граничное значение отрезка разбиения на гистограмме
Δx_k	Ширина отрезка разбиения на гистограмме
Δn_k	Количество реализаций случайной величины, попавших в отрезок разбиения на гистограмме
$P(a \le x \le b)$	Вероятность попадания случайной величины в интервал [***a,b***]
$p(x)$	Плотность вероятности случайной величины.
σ	Среднеквадратическое отклонение результата отдельного измерения
s	Оценка среднеквадратического отклонения результата отдельного измерения (найденная по малой выборке отсчетов)
σ^2	Дисперсия результата отдельного измерения
s^2	Оценка дисперсии результата отдельного измерения (найденная по малой выборке отсчетов)
$x_0 \equiv \overline{x_{\text{изм}}}$	Оценка истинного значения измеряемой величины, полученная путем усреднения результатов отдельных измерений в данной выборке.
n	Количество измерений в малой выборке.
σ_0	Среднеквадратическое отклонение оценки истинного значения измеряемой величины, полученной путем усреднения результатов отдельных измерений
σ_0^2	Дисперсия оценки истинного значения измеряемой величины, полученной путем усреднения результатов отдельных измерений
s_0	Оценка среднеквадратического отклонения оценки истинного значения измеряемой величины, полученной путем усреднения результатов отдельных измерений (найденная по малой выборке отсчетов)
${s_0}^2$	Оценка дисперсии оценки истинного значения измеряемой величины, полученной путем усреднения результатов отдельных измерений (найденная по малой выборке отсчетов)
$a_n(P)$	Коэффициент, зависящий от доверительной вероятности P и связывающий границы доверительного интервала с оценкой среднеквадратического отклонения оценки истинного значения величины.

Экспериментальная установка и порядок работы.

Для работы используется мостик Уитстона – схема, применяемая для измерения электрических сопротивлений. Схема показана на рисунке П.1.



Здесь r, r_0 – измеряемое и эталонное сопротивление; **L** – реохорд – проволока из материала с высоким удельным сопротивлением, по которой перемещается скользящий контакт **К**; R – дополнительное сопротивление (магазин переключаемых сопротивлений), позволяющее регулировать ток в схеме; **G** – гальванометр.

В процессе измерения находят положение скользящего контакта, при котором ток через гальванометр равен нулю (это состояние называется балансом моста). когда потенциалы контактов **А** и **К** равны, т.е.

$$\frac{r}{r_0} = \frac{x}{L-x} \qquad (П.1)$$

где L – длина реохорда, x - указанное на Рис.П.1 распределение. Формула (П.1) непосредственно следует из закона Ома, если учесть, что токи через сопротивления r **и** r_0, x и $(L\text{-}x)$ попарно равны (ток, ответвляющийся через гальванометр, равен нулю).

Точность, с которой можно найти положение баланса моста, очевидно, пропорциональна падению напряжения на единицу длины реохорда, т.е. току в реохорде (который практически равен току во всей схеме, если сопротивления r **и** r_0 велики по сравнению с сопротивлением реохорда). В качестве r **и** r_0 используются два известных сопротивления порядка 100 кОм, их значения, измеренные с большой точностью, указаны на установке.

Изучается распределение измеренных значений x. По указанию преподавателя можно заменить r на какое-либо неизвестное сопротивление, а r_0 на образцовое сопротивление или магазин.

Величина R и, соответственно чувствительность схемы – разная на разных установках (3 или 4 установки в группе) – задается преподавателем.

На каждой установке работает два студента, выполняющие 80 измерений (поочередно каждый выполняет 40 измерений, второй в это время записывает результаты). Затем они переходят на вторую, а затем на третью установку, выполняя по 80 измерений на каждой, записывая данные в тетради тех студентов, которые начинали на данной установке. При четырех установках на каждой выполняется по 60 измерений. Всего, таким образом, на каждой установке будет получено 240 результатов. Два студента обрабатывают 240 результатов, полученных установке всеми шестью или восемью студентами, принимающими участие в работе.

При поисках точки баланса моста важно подводить движок к положению баланса то справа, то слева, и каждый раз стараться нащупать середину интервала, в котором показание гальванометра неотличимо от нуля, не глядя на шкалу реохорда (чтобы подсознательно не руководствоваться предыдущим результатом). Если этот интервал очень широк, то можно таким же способом находить, не глядя на шкалу положения, в которых стрелка чуть-чуть отклоняется вправо и влево, затем отсчитать эти положения по шкале и находить полусумму отсчетов. Записывать длины x следует в миллиметрах, отсчитывая десятые доли миллиметра по нониусу или на глаз. (Если разброс значений x превышает 10 мм, десятые доли можно не считывать).

В качестве дополнительного задания (по указанию преподавателя) предлагается сравнить показания 10 вольтметров, подключенных к одному и тому же напряжению (совместно с образцовым прибором или без него). Разные студенты выполняют сравнение в разных участках шкалы и потом обмениваются результатами.

1. Обработка результатов.

Для записи данных необходимо заготовить следующую таблицу.

j	x_j	k	$x_j - x_0^{(5)}$	$\left(x_j - x_0^{(5)}\right)^2$	$x_j - x_0^{(40)}$	$\left(x_j - x_0^{(40)}\right)^2$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
O						
6.						
7.						
…	…	…	…	…	…	…
39						
40						
O						
OO						
41						
42						
…	…	…	…	…	…	…
239						
240						
O						
OO						
ooo						

После каждой группы из 5 измерений оставляется строчка, выделенная линейками и обозначенная **"O"**, после каждой группы 40 измерений оставляется дополнительная строчка **"OO"**, после всей таблицы – итоговая строчка **"OOO"**. Во второй столбец таблицы записываются результаты измерений в порядке их получения – выделенные строчки оставляются пусты. Третий столбец таблицы зарезервирован для построения гистограммы, в прочие будут занесены результаты промежуточных расчетов.

2. Графическая обработка результатов.

А) Найдя наибольшие и наименьшее из измеренных значений, следует разбить интервал между ними на m=20…30 равных отрезков Δx_m. (границы между отрезками должны выражаться удобными числами, кратными 1, 2, 5,... мм). В столбец "**К**" вписать номер отрезка, в который ложится данное x_j).

Б) Подсчитав число значений x_j лежащих в каждом из отрезков, построить гистограмму и сглаженную кривую $p(x)$. Определить по ним величину x_0 (при симметричной гистограмме она совпадает с положением максимума) и $\sigma = \left|x_{0.606} - x_0\right|$, где $x_{0.606}$ – абсцисса точки, ордината которой равна 0.606 максимальной.

В) Построить график зависимости $Y = \lg \dfrac{\Delta n_k}{N \Delta x_k}$ в зависимости от $X = \left(x - x_0^{(40)}\right)^2$, где значение $x_0^{(40)}$ определяется в задании 3-*б*. Согласно (4), график должен изображаться прямой

$$Y = -\lg\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right) - \frac{X}{2\sigma^2}$$

Определить значения σ из наклона прямой и начальной ординаты.

3. Численная обработка результатов

(проводится только для какой-либо одной группы из 40 значений x_i;
как правило, каждый студент обрабатывает результаты своих измерений).

А) Для 8 групп по 5 измерений в каждой найти средние $x_0^{(5)} = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} x_j$ и вписать в строку "**О**" под соответствующими результатами (см. таблицу).

Б) Найти среднее из 40 измерений $x_0^{(40)} = \frac{1}{40}\sum_{j=1}^{40} x_j$ и вписать в строку **"ОО"** под результатами этой группы (для вычисления **можно просто** усреднить 8 значений $x_0^{(5)}$).

В) Для **трех** выбранных наугад групп (из 5 измерений каждая) вычислить отклонения от среднего $x_j - x_0^{(5)}$ и их квадраты $\left(x_j - x_0^{(5)}\right)^2$, вписывая результаты в таблицу. Вычислить сумму квадратов этих отклонений и вписать в строке **"ОО"**. Найти по формулам (16) и (17) оценку средней квадратическои ошибки отдельного измерения $\sigma^{(5)}$ и среднего из пяти измерений $\sigma_0^{(5)}$. В строке **"О"** вписать значение $\sigma_0^{(5)}$ как погрешность при значении $x_0^{(5)}$ (в стандартном виде $x_0^{(5)} = \ldots \pm \ldots$) и значение $\sigma^{(5)} = \ldots \pm \ldots$.

Г) Для 40 измерений вычислить отклонения $x_j - x_0^{(40)}$, их квадраты $\left(x_j - x_0^{(40)}\right)^2$ и сумму квадратов, вписывая результаты в таблицу. Вычислить среднюю квадратическую ошибку отдельного измерения $\sigma^{(40)}$ и среднюю квадратическую ошибку среднего из 40 измерений $\sigma_0^{(40)}$, вписывая в строку **"ОО"** как для предыдущего задания.

Д) Выписать в отдельную таблицу значения $x_0^{(5)}$ для восьми групп по 5 измерений и обработать как результаты отдельных прямых измерений, вычислив средние квадратические ошибки $\sigma^{(8*5)}$ и $\sigma_0^{(8*5)}$ отдельного значения $x_0^{(5)}$ и среднего $x_0^{(40)}$.

4. Обсуждение результатов.

А) Сравнить средние квадратические ошибки и $\sigma^{(8*5)}$ и $\sigma_0^{(8*5)}$, найденные в задании 3-*д*, с величинами $\sigma_0^{(5)}$ и $\sigma_0^{(40)}$ найденными в заданиях 3-*в*, 3-*г*.

Б) Проверить выполнение зависимости $\sigma \sim 1/\sqrt{n}$, нанеся все вычисленные значения σ и σ_0 на график в зависимости от $1/\sqrt{n}$.

В) По данным для всех установок построить график зависимости средней квадратической ошибки отдельного измерения σ от сопротивления всей цепи R, т.е. от величины, обратно пропорциональной чувствительности мостовой схемы.

Г) Сравнить значение $x_0^{(40)}$ с ожидаемым $x_{ист}$ ($x_{ист}$ **в данном случае** известно из отношения r/r_0). Допущена ли в измерениях систематическая ошибка?

Д) *(дополнительное задание)* По данным сравнения показаний 10 вольтметров определить среднюю квадратичную погрешность σ и сравнить ее с величиной "максимальной погрешности", определяемой по классу точности прибора.